SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018

Clasa a V-a

Problema 1

Ştiind că $4\overline{xyzt} < \overline{tzyx}$ şi că $\overline{xyzt} + \overline{tzyx} = \overline{aabaa}$, determinaţi numărul $\overline{xyzt}$ şi cifrele a și b.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Problema 2

Arătați că dacă $n = (\overline{abc})^2 = (a+b+c)^5$, atunci:
$a^3+b^3+c^3-(a+b+c+a^2+b^2+c^2)$ este număr prim.

E:15025 Gazeta Matematică Nr.6-7-8/2016
D. M. Bătinețu Giurgiu, București
Neculai Stanciu, Buzău

Problema 3

În cantonamentul de pregătire a preliminariilor Campionatului Mondial de Fotbal din Rusia, echipa de fotbal a României participă cu 25 de jucători: 3 portari și 22 de jucători de câmp(fundași, mijlocași, atacanți). Determinați câți jucători de cămp pot juca pe toate posturile(fundași, mijlocași, atacanți), dacă se știe că:

i) 5 dintre ei nu pot fi nici fundași, nici mijlocași;
ii) 6 nu pot fi nici mijlocași, nici atacanți;
iii) 4 dintre ei nu pot fi nici fundași, nici atacanți;
iv) exact 3 pot juca atât fundaș cât și atacant;
v) exact 3 pot juca atât fundaș cât și mijlocaș;
vi) exact 3 pot juca atât mijlocaș cât și atacant;

E:15166 Gazeta Matematică Nr.4/2017, Cristian Moanță, Craiova

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018

Clasa a VI-a

Problema 1

Să se determine numărul $\overline{abcd}$ știind că numerele $\overline{abc}, \overline{bcd}, \overline{cda}$ și $\overline{dab}$ sunt direct proporționale cu numerele 24, 98, 123, respectiv 88 și suma cifrelor numărului $\overline{abcd}$ este multiplu al numărului 7.

Mihai Neagu, Rm. Sărat

Problema 2

Spunem că 101 numere naturale nenule au proprietatea (U) dacă suma lor este egală cu 1918. Notând cu d cel mai mare divizor comun al 101 numere cu proprietatea (U), să se determine cea mai mare valoare posibilă a lui d.

Costin Negrii, Bucureşti

Problema 3

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $AD \perp BC, D \in (BC), P \in (BC)$ astfel încât $BP = AB$ și $P_1 \in (BC)$ astfel încât $CP_1 = CA$. Arătați că:

$$m(\angle PAP_1) = 45^\circ.$$

Constantin Rusu, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE –ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018

Clasa a VII-a

Problema 1

Fie 2020 numere naturale cu proprietatea că suma oricăror 2018 numere luate din ele se divide cu 101. Să se arate că fiecare număr din cele 2020 se divide cu 101.

Costin Negrii, București

Problema 2

Dacă $a,b,c>0$ sunt numere reale și $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4034$, arătați că:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\le 2017$$

E:15129 Gazeta Matematică Nr.1/2017

D.M. Bătinețu Giurgiu, București

Neculai Stanciu, Buzău

Problema 3

În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB>BC$, punctul E aparține diagonalei BD. Perpendiculara în E pe BD intersectează pe AB în M și pe BC în N. Arătați că:

a) $\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{NE}{ME}$

b) $\frac{AB\cdot ME+BC\cdot NE}{BE}$ este constant.

E:15305 Gazeta Matematică Nr.1/2018, Luca Tuță, Buzău

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018

Clasa a VIII-a

Problema 1

Aflați numărul natural n care verifică egalitatea:

$$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}=\frac{\sqrt{2}+4}{2}\ .$$

Viorel Ignătescu, Buzău

Problema 2

Fie a,b,c numere reale pozitive astfel incat $a+b+c=1$. Aratati ca :

$$\sqrt{a^2+4b+4c}+\sqrt{b^2+4c+4a}+\sqrt{c^2+4a+4b}=5$$

Florin Mihai Antohe, Galați

Problema 3

Fie $OABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu $OA=OB=OC=1m, A_l=\frac{3}{2}m^2$, unde A_l este aria laterală a piramidei. Să se calculeze distanța de la vârful O la planul (ABC).

Constantin Rusu, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018
Clasa a IX-a

Problema 1

Să se arate că:

$$\frac{2}{3}+\sin 2018^{\circ}>0 .$$

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

Problema 2

Fie triunghiul ABC și punctele $M\in(BC), N\in(AC), P\in(AB)$ astfel încât: $\frac{BM}{MC}=\frac{CN}{NA}=\frac{AP}{PB}$. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor APN, BMP respectiv CNM. Să se arate că triunghiurile MNP și $G_1G_2G_3$ au același centru de greutate.

Ovidiu Țâțan, Rm. Sărat

Problema 3

Se consideră punctele M, A și B, necoliniare, x și y numere reale pozitive. Să se arate că:

$$xMA^2+yMB^2\geq\frac{xy}{x+y}AB^2$$

Constantin Rusu, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018
Clasa a X-a

Problema 1

Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$\sqrt[5]{2^x-\frac{1}{2}}-\sqrt[5]{2^x+\frac{1}{2}}=-1$$

Mihai Neagu, Rm. Sărat

Problema 2

Să se rezolve ecuația:

$$arctg(3^{\frac{1}{2}-x})+arctg(3^x)=\frac{7\pi}{12}$$

Ovidiu Ţâţan, Rm. Sărat

Problema 3

Să se arate că dacă $z\in C,|z|=1,\arg z\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ atunci:

$$\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\le|1+z|+|1+z^2|+|1+z^4|\le 6$$

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018
Clasa a XI-a

Problema 1

Fie $n \in N, n \geq 2$ și $(a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ două șiruri finite de numere reale. Se consideră matricea $A = (x_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, unde $x_{ij} = a_i + b_j$;

a) Să se arate că dacă A este inversabila atunci $n = 2$;
b) Dacă $A \in M_2(Z)$ și A este inversabilă și $A^{-1} \in M_2(Z)$ atunci numerele a_1, a_2 sunt consecutive(nu neapărat în această ordine) și numerele b_1, b_2 sunt consecutive(nu neapărat în această ordine).

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

Problema 2

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}, 2x_{n+1} = x_n + \sqrt{3 - 3x_n^2}, \forall n \in N, x_0 \in (0,1)$.
Să se arate că șirul este mărginit,periodic și să se determine x_0 astfel încât șirul să fie convergent.

Ovidiu Ţâţan, Rm. Sărat

Problema 3

Arătaţi că dacă $a, b > 0$, atunci funcţia $f : (0, \infty) \to \left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2} \right)$,
$f(x) = \sqrt{x^2 + (a+b)x + ab} - x$, este bijectivă.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti
Neculai Stanciu, Buzău

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVI-a
21 aprilie 2018
Clasa a XII-a

Problema 1

Fie funcţia $f:R\to R$ continuă cu proprietatea:

$$af(x)+bf(-x)=(x^3+x)^5+\sin^5 x,\forall x\in R,a,b\in R^*,|a|\neq|b|.$$

Să se calculeze:

$$\int_{-2019}^{+2019} f(x)dx$$

Constantin Rusu, Rm. Sărat

Problema 2

Să se determine funcțiile derivabile $F:(0,\infty)\to R$ cu proprietatea:

$$F'(\sqrt{x})=\frac{x^2+x+1}{x+1},\forall x>0$$

Ovidiu Ţâţan, Rm. Sărat

Problema 3

Considerăm inelul $Q[X]$ al polinoamelor cu coeficienți raționali.

Să se arate că:

a) Pentru fiecare $u\in Q[X]$, funcția $F_u:Q[X]\to Q[X], F_u(f)=f(u),\forall f\in Q[X]$, este un endomorfism al inelului $Q[X]$,
b) Orice endomorfism injectiv al inelului $Q[X]$ este de forma F_u cu $u\in Q[X]$, Polinom neconstant (de grad ≥ 1),
c) Orice automorfism al inelului $Q[X]$ este de forma F_u cu $u\in Q[X]$, polinom de gradul 1.

Marcel Ţena, Bucureşti

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.